Densité des matrices diagonalisables

Valentin Vinoles

20 décembre 2009

Le but de cet article est de démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans l'ensemble des matrices complexes. On démontre ensuite que c'est faux sur les réels.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables à coefficients dans $\mathbf{K}$, sous-ensemble de $\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ (ici $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

1 Cas complexe

On rappelle qu'une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$. Cette matrice est triangulaire dans une base convenable. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, notons λ_k une valeur propre de A. Si elles sont toutes distinctes, alors $A \in \mathcal{D}_n(\mathbf{C})$.

Supposons maintenant que les valeurs propres de A ne sont pas toutes distinctes. Alors si $A' = (a'_{kj})$ désigne la matrice diagonale $\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$ vérifiant

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ a'_{kk} = \frac{1}{kp}$$

pour $p \in \mathbf{N}^*$. Posons alors $A_p = A + A'$. À partir d'un certain rang N, la matrice A_p possède n valeurs propres toutes distinctes par construction, donc $A_p \in \mathcal{D}_n(\mathbf{C})$. Et on a de plus

$$||A - A_p||_\infty = ||A'||_\infty = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} |a'_{kk}| \leq \frac{1}{p}.$$

En faisant tendre p vers l'infini, A_p converge vers p.

Tout élément de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ est donc limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{D}_n(\mathbf{C})$, ce qui prouve que $\mathcal{D}_n(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ pour la norme $||\cdot||_\infty$. Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, ce résultat vaut pour toutes les normes.

2 Cas réel

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ qui n'admet aucune racine réelle. La matrice A n'est donc pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite $(D_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}_2(\mathbf{R})$ convergeant vers A pour une norme. Le discriminant associé au polynôme caractéristique de chaque D_k est continu (car polynômial en les coefficients), et est positif car $D_k \in \mathcal{D}_2(\mathbf{R})$. Par passage à la limite, on est déduit que le discriminant de $X^2 + 1$ est positif, absurde. Par suite, $\mathcal{D}_n(\mathbf{R})$ n'est pas dense dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$.